OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a X-a
18.02.2012

Subiectul I.(25 puncte)

a) Dacă $a>1$ şi $x, y \in \mathbb{R}$, demonstrați echivalența „$a^{x^2}+a^{y^2}=2a^{xy} \Leftrightarrow x=y$”.

b) Rezolvați ecuația $\dfrac{3^{\lg^2(x+x^3)}+3^{\log_2^2 x}}{2}=3^{\lg(x+x^3)\cdot\log_2 x}$.

Prof. Viorel Lupşor, Liceul Teoretic „Onisifor Ghibu” Cluj-Napoca

Subiectul II.(20 puncte)

Fie z $\in C, |z|=1, Re\ z\geq 0$. Arătaţ i că $-2\leq|1-z^2|-|1+z^2|\leq 2$.

Prof. Gorcea Violin, Liceul Teoretic “Avram Iancu”Cluj-Napoca

Subiectul III.(20 puncte)

Fie a, b, c $\in(0,1)$ sau a, b, c $\in(1,\infty)$.

a) Să se arate că : $[\log_a ab+\log_b bc+\log_c ca]\geq 6$;

b) Să se calculeze: $[\log_{ab} a+\log_{bc} b+\log_{ca} c]$.

([x] reprezintă partea intreagă a numărului real x).

Prof. Ilie Diaconu, Liceul Teoretic “Avram Iancu”Cluj-Napoca

Subiectul IV.(25 puncte)

Funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$ verifică condițiile:

i) $f(m+n)-f(m)-f(n)\in\{0,1\}$, $\forall m,n\in\mathbb{N}^*$; *ii)* $f(2)=0$; *iii)* $f(3)>0$. Să se arate că

a) Funcția f nu este injectivă; b) $f(6036)\geq 2012$

Prof. Eugen Jecan, Colegiul Național „Andrei Mureşanu” Dej

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.